Colle du 5 décembre: Algèbre linéaire

11.1 Première série

Exercice 1: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 0$ et pour i, j, k deux à deux distincts, si $a_{ik} = 0$, alors $a_{ij}a_{jk} = 0$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 2: Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), $A \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AB \in \mathbb{K}[P]$.

Exercice 3: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R}$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que, pour $p > 0$, on a $\det(A^p + B^p) \geq 0$.

Exercice 4: *(Théorème de Maschke)* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient G un sous-groupe fini de $GL(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par G.

11.2 Deuxième série

Exercice 1: *(Lemme des cinq)* Soient $A_1, ..., A_n$ des K-espaces vectoriels. On dit qu'une suite $A_1 \to A_2 \to ... \to A_n$ d'applications linéaires $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i = 1, ..., n-1$, est exacte si, pour tout i, $\mathrm{Ker}(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$. On considère le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "g_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "g_4"'] & A_5 \arrow[d, "g_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

On suppose que les lignes du diagramme sont exactes, et que le diagramme est commutatif, c'est à dire que pour tout i, $h_i \circ g_i = g_{i+1} \circ f_i$. On suppose de plus que g_1, g_2, g_4, g_5 sont des isomorphismes. Montrer que g_3 l'est aussi.

Exercice 2: On note S l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$ telles que $|a_{ij}| \leq 1$ pour tout couple (i, j). Soit $\alpha = \sup_{A \in S} \det A$. Montrer que α est fini et que c'est un entier multiple de 2^{n-1}.

Exercice 3: On dit qu'une permutation est un dérangement si elle n'a pas de points fixes. Y a-t'il plus de dérangements pairs ou impairs?

Exercice 4: Soit p un nombre premier. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que p divise u_p.

11.3 Troisième série

Exercice 1: Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments. Quel est le cardinal de $SL_n(\mathbb{F}_q)$?

Exercice 2: Dans l'espace vectoriel $M_n(K)$, quelle est la plus grande dimension possible d'un sous-espace V tel que, pour tous $X, Y \in V$, $Tr(XY) = 0$?

Exercice 3: Soient P et Q deux polynômes non constants à coefficients complexes. Soit Γ l'image de $t \in \mathbb{C} \mapsto (P(t), Q(t)) \in \mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X, Y]$ dont l'ensemble des zéros est exactement Γ.

Exercice 4: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i + j$ est premier, 0 sinon. Montrer que $|det(A)|$ est le carré d'un entier.

11.4 Quatrième série

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont le rang minimal et le rang maximal d'une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients sont exactement $1, 2, ..., n^2$?

Exercice 2: On dispose de $2n + 1$ cailloux. On suppose que dès qu'l'on enlève l'un d'entre eux, les $2n$ restants peuvent être partagés en deux paquets de n cailloux de même masse totale. Sont-ils tous nécessairement de même masse?

Exercice 3: Calculer $\det(\text{pgcd}(i, j))_{1 \leq i,j \leq n}$. On fera appel à la fonction indicatrice d'Euler.

Exercice 4: *(Algèbre extérieure)* Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une K-algèbre unitaire ΛE et une application linéaire injective $i : E \to \Lambda E$ telle que:

(i) $\forall x \in E, i(x)^2 = 0$.

(ii) pour tout morphisme $f : E \to A$ de K-algèbres unitaires tel que, pour tout $x \in E$, on a $f(x)^2 = 0$, il existe un unique morphisme de K-algèbres $\widehat{f} : \Lambda E \to A$ tel que $f = \widehat{f} \circ i$.

Le couple $(\Lambda E, i)$ est-il unique à isomorphisme près?